Développement : Théorème de Riesz-Fisher.

RM

2022-2023

Référence :

1. Oral à l'agrégation de mathématique

Énoncé :

Soit (X, μ) un espace mesuré, alors $L^p(X, \mu)$ est complet pour la norme $\|.\|_p$. De plus, toute suite qui converge dans L^p admet une sous-suite qui converge μ.p.p .

On rappelle avant les théorème suivants :

Théorème (Convergence monotone) 1 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (f_n) une suite croissante de fonction mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$, alors la limite simple de la suite de fonction est mesurable et

$$\int \lim f_n d\mu = \lim \left(\int f_n d\mu \right).$$

Théorème (de Fatou) 2 : Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur E à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors $\liminf f_n$ est mesurable et

$$\int \liminf_{n\to+\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int f_n d\mu.$$

Résolution :

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy de L^p. On veut montrer que (f_n) converge. Le principe de la démonstration est le suivant :

- On trouve une limite simple notée f
- On montre que $\|f_n - f\|_p \to 0$
- On montre que $f \in L^p$

On va distinguer deux cas selon que $p = +\infty$ ou non.

1er cas ($p = +\infty$) : On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}$ et pour $n, m \in \mathbb{N}$, $B_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$. Pour tous entiers k, n, m, A_k et $B_{n,m}$ sont de mesures nulle car $\|f_n\|_\infty < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

> En effet, comme $\|f\|_\infty$ correspond à la borne inférieur M tel que $|f| \leq M$ p.p, alors la mesure de l'ensemble des $x \in X$ tel que $|f(x)| > M \geq \|f\|_\infty$ est de mesure nulle.

Alors $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} B_{n,m}$ est de mesure nulle comme union dénombrable d'ensembles de mesure nulle.

Soit $x \in X \setminus E$, alors pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$ car $x \notin B_{n,m}$. Comme (f_n) est une suite de Cauchy de L^∞, alors la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite complexe de Cauchy et converge car $\mathbb{C}$ est complet. On note l_x la limite de la suite $(f_n(x))$.

On peut alors définir la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} l_x \text{ si } x \in X \setminus E \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Montrons que (f_n) converge vers f en norme infinie. Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) est une suite de Cauchy dans L^∞, il existe $N > 0$ tel que $\forall m, n \geq N, \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Si $x \in X \setminus E$, pour tout $m, n \geq N, |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Ainsi par passage à la limite pour $m \to \infty$, on obtient $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$. Ainsi pour tout $x \in X \setminus E, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Donc $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ car E est de mesure nulle. Donc (f_n) converge vers f en norme infinie.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe n_1 tel que $\|f - f_{n_1}\|_\infty \leq 1$. Donc $f - f_{n_1} \in L^\infty$. Or $f_{n_1} \in L^\infty$ donc $f \in L^\infty$ et (f_n) converge dans L^∞.

> Car pour $x \in X \setminus E$, on a
>
> $$|f(x)| = |f(x) - f_{n_1}(x) + f_{n_1}(x)| \leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_\infty.$$
>
> Donc on a $|f| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_\infty$ μ-p.p . Donc $f \in L^\infty$.

2ème cas ($p < +\infty$) : Pour créer la limite simple on ne peut pas faire comme précédemment. L'idée est d'exprimer $f_n(x)$ sous forme de série et de montrer que cette série converge. On écrit alors $f_n(x) = f_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(f_{k+1}(x) - f_k(x))$ pour $x \in X$. Et pour montrer cette convergence, on montre une convergence absolue.
Comme la suite (f_n) est de Cauchy, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que $\|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq 1/2^k$. On définit une suite de fonctions (g_n) de X vers $\overline{\mathbb{R}}$ définies par $g_n(x) = \sum_{k=0}^n |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)|$. Pour tout $x \in X$, la suite $(g_n(x))$ étant réelle et croissante, elle converge ou diverge vers $+\infty$. On définit alors la fonction $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x)$ de X vers $\overline{\mathbb{R}}$. Alors

$$\|g_n\|_p \leq \sum_{k=0}^n \|f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}\|_p \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \leq \frac{1 - 1/2^{n+1}}{1 - 1/2} \leq 2.$$

De plus (g_n) est une suite croissante et positive qui converge simplement vers g. Par le théorème de convergence monotone g est mesurable et la suite $(\|g_n\|_p)$ converge vers $\|g\|_p$ donc $\|g\|_p \leq 2$. Donc $g \in L^p$ et il existe E de mesure nulle telle que $|g|$ est finie sur $X \setminus E$.
On pose alors $h_n(x) = f_{\varphi(0)}(x) + \sum_{k=0}^n f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)$. Soit $x \in X \setminus E$, alors $h_n(x)$ converge car la série converge absolument (car $|h_n(x)| \leq |f_{\varphi(0)}(x)| + |g_n(x)|$ et $|g(x)|$ est finie presque partout car $g \in L^p(\mathbb{R})$). On note l_x la limite de $h_n(x)$. On définit la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} l_x \text{ si } x \in X \setminus E \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Ainsi pour $x \in X \setminus E, f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, comme (f_n) est de Cauchy, alors il existe $N > 0$ tel que pour $m, n \geq N, \|f_m - f_n\|_p \leq \varepsilon$. On va utiliser le lemme de Fatou sur $|f_{\varphi(m)} - f_n|^p$. Comme $\liminf_m |f_{\varphi(m)} - f_n|^p = |f - f_n|^p$ sur $X \setminus E$ et comme $\varphi(m) \geq m$, alors d'après le lemme de Fatou,

$$\int_X |f - f_n|^p \leq \liminf_m \int_X |f_{\varphi(m)} - f_n|^p d\mu \leq \varepsilon^p.$$

Donc $\|f - f_n\|_p \leq \varepsilon$ si $n \geq N$. De plus, $f - f_N \in L^p$ donc $f \in L^p$ et f_n converge dans L^p (même manière que dans le cas $p = +\infty$).
La convergence d'une sous-suite presque partout viens donc du fait si (f_n) converge, alors elle est de cauchy et on a montrer qu'une suite de cauchy dans L^p avec $p < +\infty$ admet $f_{\varphi(n)}$ comme suite convergeant vers f presque partout, et dans le cas $p = +\infty$, on a que la convergence est presque partout.